

三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹的 通用权函数

贾旭¹, 胡绪腾¹, 宋迎东^{1,2}

(1. 南京航空航天大学 能源与动力学院

江苏省航空动力系统重点实验室, 南京 210016;

2. 南京航空航天大学 机械结构力学及控制国家重点实验室, 南京 210016)

摘 要: 对三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹的通用权函数进行了研究. 基于有限元方法计算了裂纹面承受沿宽度方向的均布、线性分布和 2 次分布应力时的参考应力强度因子解, 建立了形式较为统一、较高精度以及适用范围相对更宽的参考应力强度因子近似表达式. 在此基础上获得了三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹的通用权函数, 最后采用裂纹面分别承受 3 次、5 次和 7 次幂函数分布应力下的应力强度因子有限元解对通用权函数的计算精度进行了检验和验证. 结果表明: 建立的通用权函数相比已有的通用权函数精度由 4% (A 点) 和 6% (B 点) 提高到 1.06% (A 点) 和 1.6% (B 点), 补充验证的 7 次幂函数分布载荷下的应力强度因子通用权函数解的精度达到 3.67% (A 点) 7.45% (B 点).

关 键 词: 三维矩形板; 1/4 椭圆角裂纹; 应力强度因子; 通用权函数; 有限元方法

中图分类号: V231.96; O346.1

文献标志码: A

General weight functions for corner quarter-elliptical crack in three-dimensional rectangular plate

JIA Xu¹, HU Xu-teng¹, SONG Ying-dong^{1,2}

(1. Jiangsu Province Key Laboratory of Aerospace Power System,

College of Energy and Power Engineering,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China;

2. State Key Laboratory of Mechanics and Control of Mechanical Structures,

Nanjing University of Aeronautics and Astronautics, Nanjing 210016, China)

Abstract: General weight functions of the corner quarter-elliptical crack in three-dimensional rectangular plate were studied. Uniform, higher-precision and relatively wider-application-range approximate expressions of reference stress intensity factors were obtained, by using the reference finite element data of the stress intensity factor when the crack surface was subjected to in-plane uniform, linear and secondary power law distribution loading along the plate width. On this basis, the general weight functions of the corner quarter-elliptical crack in three-dimensional rectangular plate were obtained, the accuracy of the general weight functions was validated by finite element method finally when the crack surface was subjected to in-plane 3, 5, 7 times power law distribution loading. The results show that the accuracy of established general weight functions is raised from 4% (point A) and 6% (point B) to 1.06% (point A) and 1.6% (point B) compared with the existing general weight functions. The accuracy of complementary validation of stress intensity factors

calculated by general weight function method under seven times power law distribution loading reaches 3.67% (point A) and 7.45% (point B).

Key words: three-dimensional rectangular plate; corner quarter-elliptical crack; stress intensity factor; general weight function; finite element method

为提高航空发动机的安全性,20世纪80年代以来损伤容限设计已逐渐成为国内外航空发动机轮盘等断裂关键件的重要设计准则之一^[1-2].损伤容限设计的关键步骤是疲劳裂纹扩展分析,而疲劳裂纹扩展分析的关键问题之一是裂纹尖端的应力强度因子的准确高效计算.根据断裂力学原理,应力强度因子与结构的几何形状、尺寸、裂纹尺寸以及结构承受的载荷密切相关.对实际工程结构,一般不存在应力强度因子的闭合解.国内外虽已出版了多套应力强度因子手册^[3-5],但不能完全满足复杂工程结构损伤容限设计的需要.有限元方法虽然可以相对准确地计算复杂结构裂纹的应力强度因子,但计算效率低,对结构损伤容限设计问题(需要针对不同裂纹类型,在疲劳裂纹扩展分析过程中反复计算应力强度因子)不太适用.

为提高疲劳裂纹扩展分析中应力强度因子的计算效率,工程上广泛采用三维矩形板裂纹体模型代替实际工程结构,将实际结构在服役载荷下危险区域无裂纹时沿预期裂纹扩展方向的应力分布施加到三维矩形板裂纹面上,以三维矩形板裂纹的应力强度因子作为实际结构危险部位裂纹应力强度因子的近似值,进而研究建立三维矩形板裂纹应力强度因子的经验计算公式,如Newman等^[6-8]针对三维矩形板裂纹模型,建立了多种类型裂纹在承受拉伸和弯曲载荷下的应力强度因子近似表达式.然而对于轮盘等实际结构,其危险部位(如轮盘中心孔/螺栓孔边或榫槽边)存在复杂的非均匀应力分布,Newman等建立的经验公式就不太适用.

Bueckner^[9]和Rice^[10]提出的权函数方法是一种可以计算任意复杂应力分布下裂纹应力强度因子的有效方法.针对三维矩形板裂纹模型,Glinka等^[11-14]基于其所发展的通用权函数方法研究建立了多种类型三维矩形板裂纹的通用权函数,为复杂非均匀应力分布下三维矩形板裂纹体和实际工程结构危险部位裂纹应力强度因子的计算提供了方便.然而Glinka等给出的一些三维矩形板裂纹(如三维矩形板角裂纹)的通用权函数仅适用于应力分布沿板厚度方向分布的情况.对于航空发动机轮盘中心孔/螺栓孔边或榫槽边等典

型危险部位,损伤容限设计时重点考虑裂纹面沿轮盘径向分布的I型裂纹,裂纹面上的应力分布主要是沿径向分布的周向应力,将该区域的裂纹简化为三维矩形板裂纹时,根据轮盘的结构和尺寸特点,裂纹面上的应力分布应沿矩形板宽度方向分布,所以Glinka等在文献^[12-14]中给出的通用权函数不太适用于这种情况.

对于三维矩形板裂纹表面承受沿宽度方向分布非均匀应力时的应力强度因子计算问题,目前较少有文献给出其权函数表达式.1998年,Kiciak等^[15]虽针对三维矩形板1/4椭圆角裂纹,建立了裂纹面应力分布沿矩形板宽度方向分布的通用权函数,但其结果存在一些不足之处,主要表现在:①参考应力强度因子有限元解的数据量不足,由此建立的通用权函数的精度和外推能力较差;②参考应力强度因子所涵盖的1/4椭圆角裂纹的长、短轴半径比 a/c 的范围较小,使通用权函数的适用范围受限;③参考应力强度因子近似表达式的形式不统一;④仅使用裂纹面承受非均匀应力3次幂函数分布(为表达方便,文中将 n 次幂函数分布简称为 n 次分布)时的应力强度因子有限元解对所建立的通用权函数的计算精度进行验证,而对实际工程结构应力集中区域的非均匀应力分布常采用高阶多项式函数进行拟合(如裂纹扩展分析软件NASGRO可采用最高6次幂函数多项式),因此其对通用权函数的验证不够充分.

针对Kiciak等研究的不足,本文对三维矩形板1/4椭圆角裂纹的通用权函数进行了研究,基于有限元法计算了三维矩形板1/4椭圆角裂纹的裂纹面承受沿宽度方向均布、线性分布和2次分布应力时的参考应力强度因子,建立了较为统一的近似表达式,扩大了参考应力强度因子所涵盖的1/4椭圆角裂纹长、短轴半径比 a/c 的范围,并采用裂纹面最高承受非均匀应力7次分布的应力强度因子有限元解对所建立的通用权函数的计算精度进行了验证,取得了较好的结果.

1 三维矩形板1/4椭圆角裂纹的通用权函数

权函数方法将决定应力强度因子的几何与载

荷因素分开考虑, 权函数反应裂纹体的几何特性, 可以根据裂纹体承受“简单载荷”(“简单载荷”称为参考载荷, 此载荷下的应力强度因子称为参考应力强度因子) 下的已知应力强度因子解来确定^[10]

$$m(x, a_{\text{crack}}) = \frac{H}{2K_r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial a_{\text{crack}}} \quad (1)$$

式中 a_{crack} 为裂纹长度, K_r 为参考应力强度因子, u_r 为参考载荷作用下的裂纹面张开位移, H 为弹性模量, 对各向同性材料 $H = E$ (平面应力) 或 $E/(1-\nu^2)$ (平面应变), $m(x, a_{\text{crack}})$ 为权函数. 权函数一经导出, 便可以采用如下积分公式来求解任意复杂载荷下的应力强度因子 $K^{[10]}$:

$$K = \int_0^{a_{\text{crack}}} \sigma(x) m(x, a_{\text{crack}}) dx \quad (2)$$

式中 $\sigma(x)$ 为任意复杂载荷下裂纹体假设无裂纹时沿原裂纹面上的应力分布. 由式(2)可知, 采用权函数法计算应力强度因子的关键在于确定能够反映结构几何特征的权函数.

对于如图 1 所示的初始形状为 1/4 椭圆的三维矩形板角裂纹, 在承受垂直于裂纹面的疲劳载荷时, 裂纹扩展分析时常假设裂纹前沿形状在裂纹扩展过程中始终近似为椭圆形状, 裂纹尺寸由椭圆长短轴半径的两个顶点(图 1 中 A, B 两点)决定. 对其进行疲劳裂纹扩展分析仅需要计算 A, B 两点的应力强度因子变化范围. 因此仅需要确定 A, B 两点的权函数.

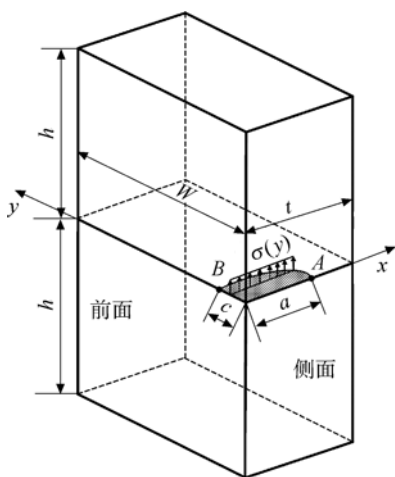


图 1 三维矩形平板 1/4 椭圆角裂纹模型

Fig. 1 Corner quarter-elliptical crack model in three-dimensional rectangular plate

对于三维矩形平板 1/4 椭圆角裂纹, 影响应力强度因子的因素较多, 直接通过式(1)来确定其

权函数比较困难. Glinka 等提出的通用权函数方法假设 I 型裂纹的权函数具有一种普遍形式. 针对三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹, 在裂纹面承受沿宽度方向(图 1 中 y 方向)的分布应力时, A, B 两点的通用权函数具有如下表达式^[15]:

$$m_A(y, c) = \frac{2}{\sqrt{\pi y}} \left[1 + M_{1A} \left(\frac{y}{c} \right)^{1/2} + M_{2A} \left(\frac{y}{c} \right) + M_{3A} \left(\frac{y}{c} \right)^{3/2} \right] \quad (3)$$

$$m_B(y, c) = \frac{2}{\sqrt{2\pi(c-y)}} \left[1 + M_{1B} \left(1 - \frac{y}{c} \right)^{1/2} + M_{2B} \left(1 - \frac{y}{c} \right) + M_{3B} \left(1 - \frac{y}{c} \right)^{3/2} \right] \quad (4)$$

式中 $m_A(y, c)$ 为 A 点的通用权函数, $m_B(y, c)$ 为 B 点的通用权函数, a 和 c 分别为 1/4 椭圆角裂纹的长、短半轴(见图 1), M_{1A} , M_{2A} , M_{3A} 和 M_{1B} , M_{2B} , M_{3B} 分别为确定 A, B 点通用权函数的待定系数.

根据权函数法的基本原理, 若 A, B 两点的通用权函数已确定, 当裂纹面承受沿矩形板宽度方向的任意分布应力 $\sigma(y)$ 时, A, B 两点的应力强度因子可由如下积分公式计算:

$$K^i = \int_0^c \sigma(y) m_i(y, c) dy \quad (5)$$

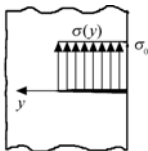
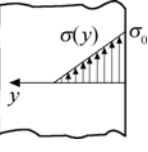
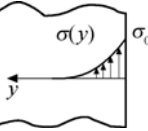
式中 i 为 A 或 B. 同时, 三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹在已知参考载荷下的参考应力强度因子解也应满足式(5). 因此, 可采用三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹在 3 组不同参考载荷下的参考应力强度因子解, 通过式(5)建立通用权函数待定系数需满足的方程组, 由此来确定 A, B 两点通用权函数的待定系数 M_{1A} , M_{2A} , M_{3A} 和 M_{1B} , M_{2B} , M_{3B} .

为确定上述待定系数, 本文选用了裂纹面分别承受沿矩形板宽度方向为均布、线性分布和 2 次分布 3 种参考载荷及参考应力强度因子的表达式(见表 1). 表中 $F_i^{A(B)}$ 为几何修正因子, F_i^A 对应 K_i^A , F_i^B 对应 K_i^B ; $i=0, 1, 2$ 分别表示参考载荷为均布、线性分布和 2 次分布; Q 为第 2 类完全椭圆积分近似表达式的平方

$$Q = \begin{cases} 1 + 1.464 \left(\frac{a}{c} \right)^{1.65} & \frac{a}{c} \leq 1 \\ 1 + 1.464 \left(\frac{c}{a} \right)^{1.65} & \frac{a}{c} > 1 \end{cases} \quad (6)$$

将上述参考载荷和参考应力强度因子表达式代入式(5), 可得到如下关于通用权函数待定系数 M_{iA} 和 M_{iB} ($i=1, 2, 3$) 的线性方程组

表1 参考载荷及参考应力强度因子
Table 1 Reference loadings and reference stress intensity factors

参考载荷	参考载荷示意图	参考载荷及参考应力强度因子
均布		$\sigma(y) = \sigma_0$ $K_0^{A(B)} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_0^{A(B)}$
线性分布		$\sigma(y) = \sigma_0 \left(1 - \frac{y}{c}\right)$ $K_1^{A(B)} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_1^{A(B)}$
2次分布		$\sigma(y) = \sigma_0 \left(1 - \frac{y}{c}\right)^2$ $K_2^{A(B)} = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_2^{A(B)}$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_0^A = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_0^A = \\ \sigma_0 \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left(4 + 2M_{1A} + \frac{4}{3}M_{2A} + M_{3A} \right) \\ K_1^A = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_1^A = \\ \sigma_0 \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left(\frac{8}{3} + M_{1A} + \frac{8}{15}M_{2A} + \frac{1}{3}M_{3A} \right) \\ K_2^A = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_2^A = \\ \sigma_0 \sqrt{\frac{c}{\pi}} \left(\frac{32}{15} + \frac{2}{3}M_{1A} + \frac{32}{105}M_{2A} + \frac{1}{6}M_{3A} \right) \end{array} \right. \quad (7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} K_i^B = \sigma_0 \sqrt{\frac{\pi a}{Q}} F_i^B = \\ \sigma_0 \sqrt{\frac{2c}{\pi}} \left(\frac{1}{i + \frac{1}{2}} + \frac{M_{1B}}{i + 1} + \frac{M_{2B}}{i + \frac{3}{2}} + \frac{M_{3B}}{i + 2} \right) \end{array} \right. \quad (8)$$

式中 $i=0,1,2$. 求解上述两个方程组,可得到通用权函数待定系数 M_{iA} 和 M_{iB} 的解

$$M_{1A} = \frac{42\pi}{\sqrt{Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\frac{1}{7}F_0^A - \frac{13}{14}F_1^A + F_2^A \right) - \frac{48}{5} \quad (9)$$

$$M_{2A} = \frac{315\pi}{2\sqrt{Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(-\frac{1}{6}F_0^A + F_1^A - F_2^A \right) + 21 \quad (10)$$

$$M_{3A} = \frac{132\pi}{\sqrt{Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\frac{2}{11}F_0^A - F_1^A + \frac{21}{22}F_2^A \right) - \frac{64}{5} \quad (11)$$

$$M_{1B} = \frac{90\pi}{\sqrt{2Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\frac{1}{5}F_0^B - F_1^B + \frac{14}{15}F_2^B \right) - \frac{48}{5} \quad (12)$$

$$M_{2B} = \frac{315\pi}{\sqrt{2Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(-\frac{1}{6}F_0^B + F_1^B - F_2^B \right) + 21 \quad (13)$$

$$M_{3B} = \frac{252\pi}{\sqrt{2Q}} \sqrt{\frac{a}{c}} \left(\frac{1}{7}F_0^B - \frac{20}{21}F_1^B + F_2^B \right) - \frac{64}{5} \quad (14)$$

可以看出,要完全建立 A、B 两点的通用权函数,就要获得这两点的参考应力强度因子表达式,即确定其中几何修正因子 F_i^A 和 F_i^B 的表达式.

2 参考应力强度因子的确定

如上所述,三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹通用权函数的建立需要确定 A、B 两点在参考载荷下的参考应力强度因子表达式,具体目标是确定几何修正因子与矩形板和角裂纹几何尺寸之间的相关关系.

针对航空发动机轮盘的几何特点,对于其中心孔边或榫槽边萌生的角裂纹,当简化为三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹模型时,矩形板宽度远大于板的厚度,在裂纹扩展为贯穿裂纹之前可忽略矩形板宽度对应力强度因子的影响. Kiciak 等^[15] 在研究时也未考虑板宽度的影响. 在此假设下,影响应力强度因子的几何参数主要包括:矩形板的厚度 t 、角裂纹尺寸 a 和 c . 为建立参考应力强度因子表达式中的几何修正因子,本文采用有限元奇异单元法计算了一系列矩形板角裂纹分别在裂纹面承受均布、线性分布和 2 次分布应力时的应力强度因子解. 矩形板和裂纹尺寸配置方案为: $a/t=0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8$; $a/c=0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0$. 基于参考应力强度因子解,采用多项式函数分布拟合获得了形式较为统一的、高精度的参考应力强度因子表达式.

2.1 A 点的参考应力强度因子

根据 A 点在 3 种参考载荷下的参考应力强度因子有限元解,当 $0.1 \leq a/t \leq 0.8$ 时,几何修正因子 $F_i^A (i=0,1,2)$ 可表示为关于 a/t 的多项式函数

$$F_i^A = p_1 + p_2 \left(\frac{a}{t} \right)^2 + p_3 \left(\frac{a}{t} \right)^4$$

$$0.2 \leq \frac{a}{c} \leq 1 \quad (15)$$

$$F_i^A = p_4 + p_5 \left(\frac{a}{t} \right) + p_6 \left(\frac{a}{t} \right)^2 + p_7 \left(\frac{a}{t} \right)^3 +$$

$$p_8 \left(\frac{a}{t} \right)^4 + p_9 \left(\frac{a}{t} \right)^5 + p_{10} \left(\frac{a}{t} \right)^6$$

$$1 < \frac{a}{c} \leq 4 \quad (16)$$

其中 $p_j (j=1, 2, \dots, 10)$ 均可表示为如下关于 a/c 的多项式函数:

$$p_j = A_1 + A_2 \frac{a}{c} + A_3 \frac{c}{a} + A_4 \left(\frac{a}{c} \right)^2 +$$

$$A_5 \left(\frac{c}{a} \right)^2 + A_6 \left(\frac{a}{c} \right)^3 + A_7 \left(\frac{c}{a} \right)^3 \quad (17)$$

式中 $A_k (k=1 \sim 7)$ 为 p_j 的拟合系数. 参考载荷分别为均布、线性分布和 2 次分布应力时, $A_k (k=1 \sim 7)$ 的拟合结果分别见表 2、表 3 和表 4. 经验算, 当 $1 < a/c \leq 4$ 时由式(15)和式(17)计算的 A 点参考应力强度因子值与有限元解的相对误差在 0.1% 以内; 当 $0.2 \leq a/c \leq 1$ 时, 由式(16)和式(17)计算的 A 点参考应力强度因子值与有限元解的相对误差在 0.8% 以内.

表 2 均布参考载荷下 A 点几何修正因子的拟合系数

Table 2 Coefficients of geometric correction factor under uniform reference loading at A point

F_i^A 的拟合系数	p_j 的拟合系数						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
p_1	-3.70486	6.92948	1.59509	-5.07196	-0.28358	1.49540	0.01971
p_2	32.72934	-49.86168	-11.06000	38.04765	2.00904	-11.49270	-0.14111
p_3	-49.27200	75.00848	17.22575	-57.12279	-2.99541	17.18707	0.21089
p_4	36.77629	-12.54820	-56.69790	2.18824	46.28849	-0.15290	-14.77150
p_5	-66.10690	22.57152	104.25510	-3.94227	-83.93090	0.27558	26.75471
p_6	332.60290	-113.36100	-524.61700	19.72372	422.70330	-1.36960	-134.54500
p_7	-909.52000	309.16560	1435.23800	-53.52050	-1157.09000	3.68667	368.80960
p_8	1424.51500	-482.78700	-2250.27000	83.14964	1818.71800	-5.68369	-579.79000
p_9	-1189.17000	401.99190	1880.18900	-68.93080	-1524.73000	4.68168	486.71180
p_{10}	411.22300	-138.78000	-650.36500	23.72224	529.86820	-1.60388	-169.44500

表 3 线性分布参考载荷下 A 点几何修正因子的拟合系数

Table 3 Coefficients of geometric correction factor under linear power law distribution reference loading at A point

F_i^A 的拟合系数	p_j 的拟合系数						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
p_1	-2.88379	5.44783	1.29867	-3.99336	-0.23011	1.18536	0.01594
p_2	26.41956	-40.069100	-9.06491	30.55334	1.64473	-9.234070	-0.11500
p_3	-39.60930	60.00566	13.98211	-45.64060	-2.44086	13.73593	0.17130
p_4	29.48249	-10.03410	-45.50580	1.74778	37.23821	-0.12206	-11.88320
p_5	-59.48240	20.26919	93.99256	-3.53317	-75.79250	0.24654	24.20110
p_6	300.52230	-102.15100	-475.34600	17.72766	383.88610	-1.22822	-122.50600
p_7	-823.60800	279.02660	1304.52300	-48.15740	-1055.20000	3.30886	337.25440
p_8	1286.44800	-434.32700	-2041.20000	74.55438	1656.08000	-5.08233	-529.67800
p_9	-1068.94000	359.81680	1698.67400	-61.47740	-1383.29000	4.16340	443.10350
p_{10}	367.38310	-123.405000	-584.35900	21.01247	478.11740	-1.41625	-153.40500

表4 2次分布参考载荷下A点几何修正因子的拟合系数

Table 4 Coefficients of geometric correction factor under binomial power law distribution reference loading at A point

F_i^A 的拟合系数	p_j 的拟合系数						
	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
p_1	-2.32839	4.45653	1.09101	-3.25249	-0.19219	0.96585	0.01326
p_2	22.41246	-33.90260	-7.74597	25.82991	1.40255	-7.80479	-0.09777
p_3	-33.39530	50.45973	11.83737	-38.34470	-2.06762	11.53759	0.14472
p_4	24.37605	-8.28115	-37.62850	1.44137	30.86897	-0.10064	-9.85344
p_5	-55.02380	18.72278	87.06437	-3.25870	-70.27570	0.22706	22.46090
p_6	279.04120	-94.66970	-442.18700	16.39819	357.58220	-1.13414	-114.27000
p_7	-765.75000	258.84000	1215.74800	-44.57740	-985.14400	3.05713	315.30810
p_8	1193.36300	-401.89300	-1898.67000	68.82859	1543.44200	-4.68291	-494.44200
p_9	-987.76600	331.59730	1574.46200	-56.52020	-1284.67000	3.82009	412.16350
p_{10}	337.78140	-113.13300	-539.08500	19.21515	441.88330	-1.29243	-141.97300

2.2 B点的参考应力强度因子

根据B点在3种参考载荷下的参考应力强度因子有限元解,当 $0.1 \leq a/t \leq 0.8$ 时,几何因子 $F_i^B (i=0,1,2)$ 可表示为关于 a/t 的多项式函数

$$F_i^B = p_1 + p_2 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + p_3 \left(\frac{a}{t}\right)^4 + p_4 \left(\frac{a}{t}\right)^6 \quad (18)$$

$$0.2 \leq \frac{a}{c} \leq 1$$

$$F_i^B = p_5 + p_6 \left(\frac{a}{t}\right) + p_7 \left(\frac{a}{t}\right)^2 + p_8 \left(\frac{a}{t}\right)^3 + p_9 \left(\frac{a}{t}\right)^4 + p_{10} \left(\frac{a}{t}\right)^5 + p_{11} \left(\frac{a}{t}\right)^6 \quad (19)$$

$$1 < \frac{a}{c} \leq 4$$

其中 $p_j (j=1,2,3,4)$ 可表示为如下关于 a/c 的多项式函数:

$$p_j = C_1 + C_2 \left(\frac{a}{c}\right) + C_3 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + C_4 \left(\frac{a}{c}\right)^3 +$$

$$C_5 \left(\frac{a}{c}\right)^4 + C_6 \left(\frac{a}{c}\right)^5 + C_7 \left(\frac{a}{c}\right)^6 \quad (20)$$

其中 $p_j (j=5,6,\dots,11)$ 可表示为如下关于 $\frac{a}{c}$ 的多项式函数:

$$p_j = C_1 + C_2 \left(\frac{a}{c}\right) + C_3 \left(\frac{a}{c}\right)^{-1} + C_4 \left(\frac{a}{c}\right)^2 + C_5 \left(\frac{a}{c}\right)^{-2} + C_6 \left(\frac{a}{c}\right)^3 + C_7 \left(\frac{a}{c}\right)^{-3} \quad (21)$$

式中 $C_k (k=1,2,\dots,7)$ 为 p_j 的拟合系数.参考载荷分别为均布、线性分布和2次分布应力时, C_k 的拟合结果分别见表5、表6和表7.经验算,当 $1 < a/c \leq 4$ 时由式(18)和式(20)计算的B点参考应力强度因子值与有限元解的相对误差在0.1%以内;当 $0.2 \leq a/c \leq 1$ 时,由式(19)和式(21)计算的B点参考应力强度因子值与有限元解的相对误差在0.8%以内.

表5 均布参考载荷下B点几何修正因子的拟合系数

Table 5 Coefficients of geometric correction factor under uniform reference loading at B point

F_i^B 的拟合系数	p_j 的拟合系数						
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
p_1	0.31068	0.58323	3.62167	-12.66426	18.66918	-13.15840	3.61822
p_2	-1.06858	24.49666	-119.40250	285.48199	-365.77980	239.72662	-63.08000
p_3	3.07453	-41.41069	241.29119	-655.26720	908.93933	-626.84940	170.67312

续表

F_i^B 的拟合系数	p_j 的拟合系数						
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
p_1	0.78226	16.16767	-161.97800	511.56515	-756.29160	538.96251	-149.56280
p_5	55.79085	-18.83050	-86.95790	3.26039	70.67271	-0.22626	-22.63170
p_6	-11.72590	3.34203	21.13818	-0.45356	-18.71490	0.02158	6.38938
p_7	82.29455	-23.80920	-146.78600	3.31139	128.87840	-0.16535	-43.68440
p_8	-294.20400	87.10692	516.15630	-12.56650	-445.85700	0.67137	150.58310
p_9	583.69780	-177.61100	-1005.07000	26.70833	858.75650	-1.52932	-287.39400
p_{10}	-564.16200	174.87720	958.80350	-27.00810	-812.20100	1.61096	270.10820
p_{11}	211.27420	-66.37310	-355.51900	10.44153	298.84660	-0.63961	-98.81540

表 6 线性分布参考载荷下 B 点几何修正因子的拟合系数

Table 6 Coefficients of geometric correction factor under linear power law distribution reference loading at B point

F_i^B 的拟合系数	p_j 的拟合系数						
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
p_1	0.05576	-0.75746	5.53065	-13.32890	16.82301	-10.90580	2.85539
p_2	-0.72131	15.26900	-72.67000	171.38820	-218.32100	143.02780	-37.74500
p_3	1.66446	-24.21800	144.59720	-395.16800	550.70480	-381.99500	104.71860
p_4	0.78613	8.38345	-96.67710	312.32120	-466.49600	335.21010	-93.77390
p_5	32.01268	-10.83980	-50.11590	1.87841	40.43010	-0.13035	-12.92530
p_6	5.34404	-2.18485	-7.02667	0.45474	4.74838	-0.03773	-1.30101
p_7	-25.40350	10.89678	31.47994	-2.35557	-19.90140	0.20140	5.11387
p_8	67.92451	-29.83860	-81.93110	6.57278	51.60378	-0.57040	-12.59260
p_9	-85.17500	39.51819	95.08829	-9.05372	-54.05540	0.80911	11.35857
p_{10}	57.84289	-28.03030	-60.36390	6.61533	31.20138	-0.60414	-5.40349
p_{11}	-17.01120	8.41771	17.24785	-2.01747	-8.79134	0.18648	1.47590

表 7 2 次分布参考载荷下 B 点几何修正因子的拟合系数

Table 7 Coefficients of geometric correction factor under binomial power law distribution reference loading at B point

F_i^B 的拟合系数	p_j 的拟合系数						
	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6	C_7
p_1	0.04533	-0.64673	3.84603	-8.71407	10.64441	-6.77304	1.75402
p_2	-0.55183	11.12397	-52.12390	121.67870	-154.03000	100.56090	-26.49450
p_3	1.18185	-17.62750	104.70450	-283.97000	393.56980	-272.07300	74.44120
p_4	0.61910	6.07429	-70.45730	226.34970	-336.56500	241.12170	-67.32630
p_5	17.00425	-5.74774	-26.61660	0.99449	21.49092	-0.06890	-6.88103
p_6	5.09228	-2.01042	-6.98510	0.40672	4.94850	-0.03295	-1.42156
p_7	-25.92010	10.49926	34.58441	-2.17233	-23.87400	0.17940	6.72855
p_8	74.26221	-30.24250	-98.83680	6.29290	69.24201	-0.52252	-19.35610
p_9	-106.71400	44.07151	140.02250	-9.28978	-96.72420	0.78033	26.77086
p_{10}	82.90597	-34.35380	-108.61800	7.27253	75.19121	-0.61375	-20.87980
p_{11}	-27.15300	11.17721	35.96777	-2.35792	-25.40260	0.19872	7.21394

3 通用权函数方法与有限元方法 计算结果对比与讨论

上文基于三维矩形板内 1/4 椭圆角裂纹在裂纹面承受沿宽度方向的均布、线性分布和 2 次分布应力下的应力强度因子有限元解,建立了应力强度因子的经验关系式,将其分别带入式(9)~式(14),可确定 A、B 两点通用权函数表达式中的待定系数,将待定系数表达式代入式(3)和式(4),可最终获得 A、B 两点的通用权函数。

为检验上述建立的通用权函数的计算精度和适用性,本文分别计算了三维矩形板内 1/4 椭圆角裂纹在裂纹面承受沿宽度方向的 3 次、5 次和 7 次分布应力(见式(22))时的应力强度因子,并与有限元解进行了对比分析。

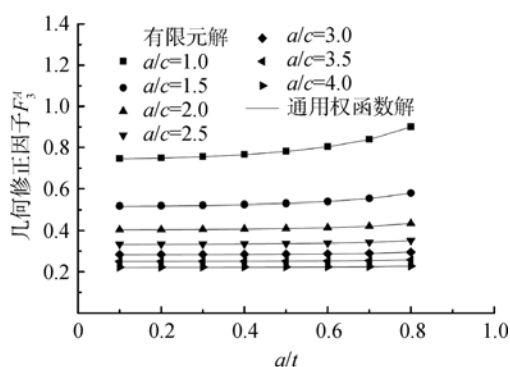
$$\sigma(y) = \sigma_0 \left(1 - \frac{y}{c}\right)^i \quad (22)$$

其中 $i=3, 5, 7$ 。有限元方法和通用权函数方法计算所得角裂纹在裂纹面承受上述幂函数分布应力

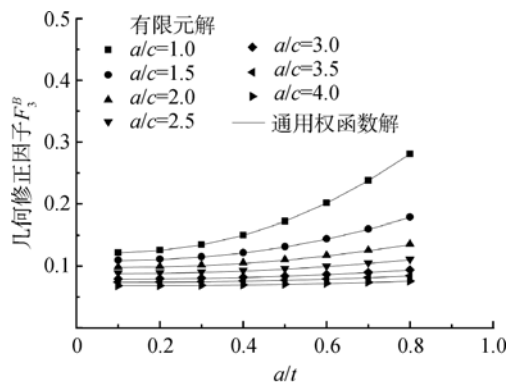
下 A、B 两点的应力强度因子(这里以几何修正因子来表示)随裂纹尺寸的变化曲线如图 2~图 4 所示。从图中可以看出,当裂纹面承受更高阶次的幂函数分布应力时,对于不同尺寸的椭圆形角裂纹,应力强度因子的通用权函数解与有限元解吻合很好。

表 8 给出了三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹在裂纹面承受沿宽度方向不同应力分布时 A、B 两点应力强度因子的通用权函数方法与有限元方法之间的相对误差。其中应力分布为均布、线性分布、2 次分布时,为应力强度因子参考解的相对误差。

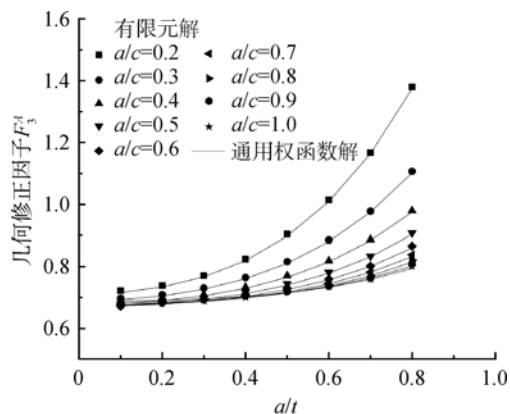
从表 8 可以看出,当 $a/c < 1$ 时,通用权函数方法对参考应力强度因子的计算精度要大于 $a/c > 1$ 时的精度。同样当 $a/c < 1$ 时,通用权函数方法对裂纹面承受 3 次、5 次和 7 次分布应力时的应力强度因子的计算精度也要大于 $a/c > 1$ 时的精度。说明参考应力强度因子解的精度对基于参考解建立的通用权函数方法的计算精度起决定性作用。



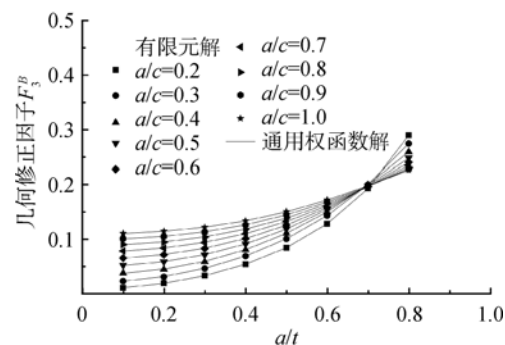
(a) $1 < a/c \leq 4$ 时 A 点的几何修正因子



(b) $1 < a/c \leq 4$ 时 B 点的几何修正因子



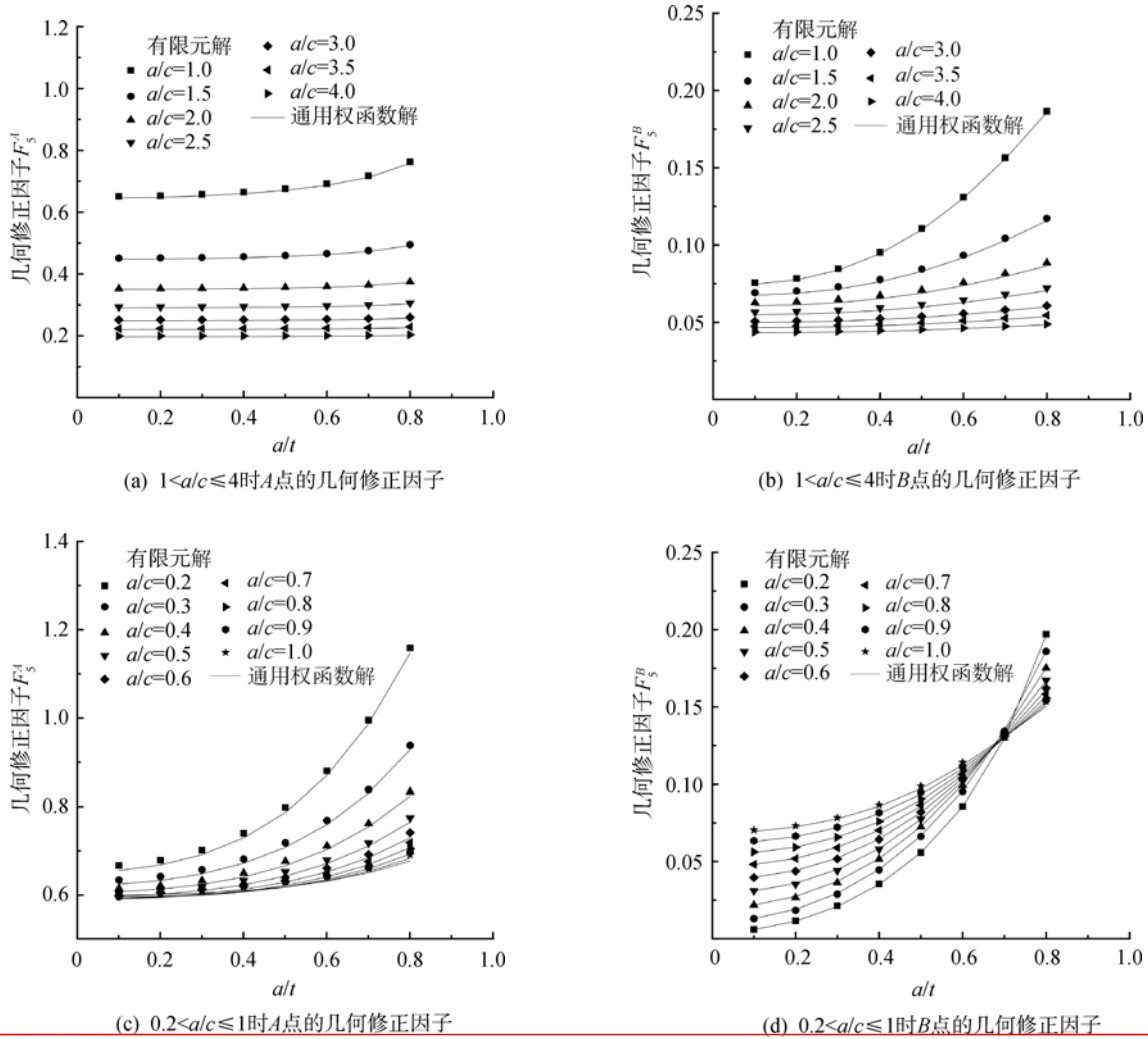
(c) $0.2 < a/c \leq 1$ 时 A 点的几何修正因子



(d) $0.2 < a/c \leq 1$ 时 B 点的几何修正因子

图 2 $i=3$ 时通用权函数方法与有限元方法的对比

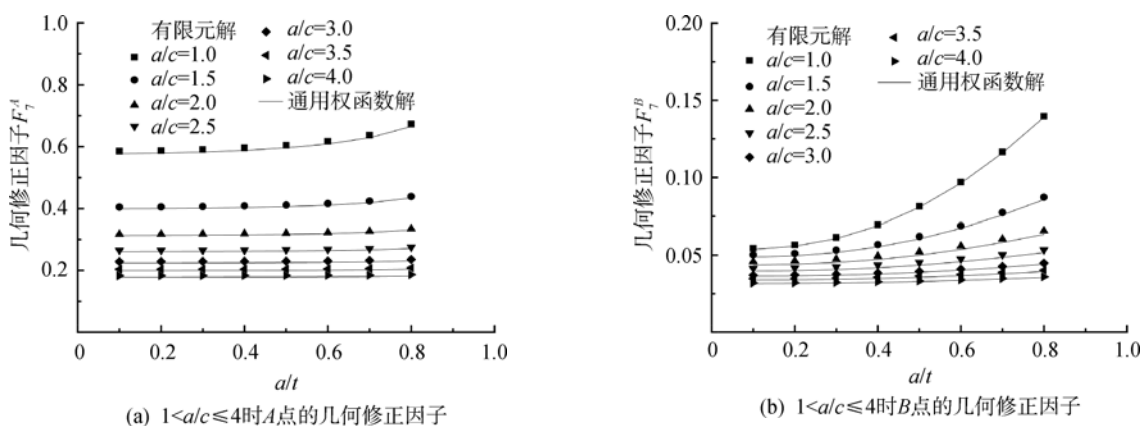
Fig. 2 Comparison of general weight function method and finite element method when $i=3$

图 3 $i=5$ 时通用权函数方法与有限元方法的对比Fig. 3 Comparison of general weight function method and finite element method when $i=5$

$a/c < 1$ 时,通用权函数方法计算精度之所以大于 $a/c > 1$ 时的计算精度,主要是由于 $a/c < 1$ 时,矩形板宽度的影响将增大,本文建立参考应力强度因子近似表达式没有考虑矩形板宽度的影响.同样的原因,B点的计算相对误差普遍要大于A点的计算相对误差.虽然没有考虑宽度的影响,

但计算误差在可接受的范围.

对于三维矩形板 1/4 椭圆角裂纹,本文建立的通用权函数对应力强度因子的计算精度明显高于 Kiciak 等在文献[15]中建立的通用权函数的计算精度.Kiciak 等仅考察了裂纹面在承受沿宽度方向的均布、线性分布、2次和3次分布应力时



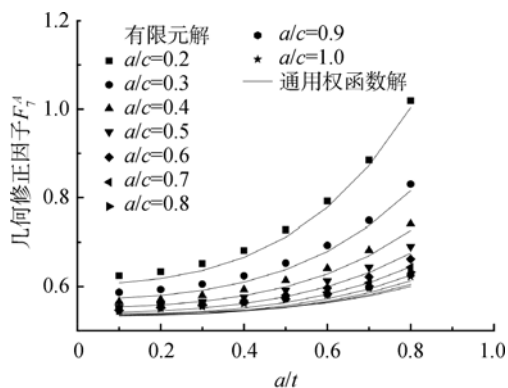
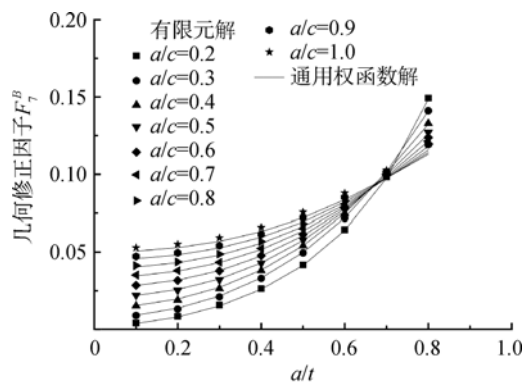
(c) $0.2 < a/c \leq 1$ 时 A 点的几何修正因子(d) $0.2 < a/c \leq 1$ 时 B 点的几何修正因子图4 应力分布 $i=7$ 时通用权函数方法与有限元方法的对比Fig. 4 Comparison of general weight function method and finite element method when $i=7$

表8 不同幂分布载荷下通用权函数方法与有限元法最大相对误差

Table 8 Max relative errors between general weight function method and finite element method under different power law distribution loadings

裂纹面幂 分布载荷	相对误差/%			
	$0.2 \leq a/c \leq 1$		$1 < a/c \leq 4$	
	A 点	B 点	A 点	B 点
均布	0.81	0.17	< 0.1	< 0.1
参考解 线性分布	0.65	0.82	< 0.1	< 0.1
2 次分布	0.66	0.89	< 0.1	< 0.1
3 次分布	1.06	1.60	0.30	1.20
验证解 5 次分布	2.20	3.35	1.40	3.30
7 次分布	3.67	7.45	2.70	4.80

的应力强度因子计算精度,最大相对误差分别为4%(A点)和6%(B点).从表8可以看出,基于本文建立的通用权函数计算的A,B两点的应力强度因子与有限元解的最大相对误差分别为1.06%(A点)和1.6%(B点).显然,本文建立的通用权函数明显提高了计算精度.

裂纹面在承受沿宽度方向的5次和7次幂函数分布应力时,通用权函数方法的计算精度随应力变化剧烈程度的增大逐渐下降.裂纹面应力分布为7次幂函数时,通用权函数方法计算结果与有限元方法之间的最大相对误差分别为:A点不超过4%,B点不超过8%.

工程中常将结构危险部位在实际载荷作用下的复杂应力分布用多项式幂函数分布(如NAS-GRO软件^[16]最高采用6次多项式函数)来近似

拟合,然后应用叠加原理将多项式中各项分布应力单独作用下的应力强度因子数值进行求和得到实际应力分布下的应力强度因子.从表8可以看出,本文建立的通用权函数对裂纹面承受最高至7次幂函数分布应力时的应力强度因子均有较高的计算精度,且与有限元方法之间的相对误差偏大偏小不一,复杂应力分布拟合为多项式函数时各项的系数也有正有负,因此基于通用权函数方法和叠加原理来求解复杂非均匀应力分布下的应力强度因子也将具有较高的计算精度.

4 结 论

本文在Kiciak等工作的基础上,针对三维矩形板1/4椭圆角裂纹,采用有限元法计算了角裂纹在裂纹面承受沿宽度方向的均布、线性分布和2次分布应力下的参考应力强度因子解,重新建立了参考应力强度因子解的近似表达式,最后在此基础上得到了三维矩形板1/4椭圆角裂纹的通用权函数,并对其计算精度进行了检验和验证,得到以下主要结论:

1) 本文建立的三维矩形板1/4椭圆角裂纹的参考应力强度因子近似表达式形式更为统一,适用范围更宽,并具有较高的精度.

2) 本文建立的三维矩形板1/4椭圆角裂纹的通用权函数具有相对更宽的适用范围,适用的角裂纹尺寸范围为: $0.2 \leq a/c \leq 4$, $0.1 \leq a/t \leq 0.8$.

3) 本文建立的三维矩形板1/4椭圆角裂纹的通用权函数对裂纹面承受最高至7次幂函数分布应力时的应力强度因子的计算精度均较高,相对于有限元方法的最大相对误差为8%.

参考文献:

- [1] 国防科学技术工业委员会. GJB-Z 101-97 航空发动机结构完整性指南[S]. 北京:国防科学技术工业委员会军标发行部,1997.
- [2] 吕文林,陈俊粤,田德义. 航空涡喷、涡扇发动机结构设计准则,第2册 轮盘[M]. 北京:中国航空工业总公司发动机系统工程局,1997.
- [3] 中国航空研究院. 应力强度因子手册[M]. 北京:科学出版社,1981.
- [4] Tada H, Paris P, Irwin G. The stress analysis of cracks handbook[M]. St. Louis, Missouri, USA: Paris Production Incorporation,1985.
- [5] Murakami Y, Keer L M. Stress intensity factors handbook [M]. New York: Pergamon Press,1992.
- [6] Newman J C, Jr, Raju I S. Stress intensity factor equations for cracks in three-dimensional finite bodies subjected to tension and bending loads[R]. Hampton, Virginia: NASA Langley Research Center,1984.
- [7] Raju I S, Newman J C. Stress intensity factors for two symmetric corner cracks[J]. Fracture Mechanics, 1979, 677:411-430.
- [8] Raju I S, Neman J C, Jr. Stress intensity factors for corner cracks in rectangular bars[R]. American Society for Testing and Materials, ASTM STP969,1988.
- [9] Bueckner H F. A Novel principle for the computation of stress intensity factors[J]. Journal of Applied Mathematics and Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik,1970,50(10):529-546.
- [10] Rice J. Some remarks on elastic crack-tip stress field[J]. International Journal of Solids and Structures,1972,8(6):751-758.
- [11] Glinka G, Shen G. Universal features of weight functions for cracks in mode I[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1991,40(6):1135-1146.
- [12] Xin W, Lambert S B. Stress intensity factors and weight functions for high aspect ratio semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates[J]. Engineering Fracture Mechanics,1997,57(1):13-24.
- [13] Moftakhar A A, Glinka G. Calculation of stress intensity factors by efficient integration of weight functions[J]. Engineering Fracture Mechanics,1992,43(5):749-756.
- [14] Glinka G. Development of weight functions and computer integration procedures for calculating stress intensity factors around cracks subjected to complex stress fields[R]. Hampton, VA, USA: Analytical Services & Materials, Inc.,1996.
- [15] Kiciak A, Glinka G, Eman M. Weight functions for corner crack in finite thickness plate subjected to in-plane loading [J]. Engineering Fracture Mechanics, 1998, 60 (2): 221-238.
- [16] NASA Johnson Space Center. NASGRO® fracture mechanics and fatigue crack growth analysis software[M]. San Antonio: Southwest Research Institute,2002.

(编辑:王碧琚)